Siegel modular forms of middle parahoric subgroups and Ihara lift (Analytic and Arithmetic Theory of Automorphic Forms)

伊吹山, 知義

数理解析研究所講究録 第2100巻 2019年 202-213

Siegel modular forms of middle parahoric subgroups and Ihara lift

伊吹山知義 (大阪大学)

Tomoyoshi Ibukiyama
Osaka University

1. Introduction

講演の内容は、すでに論文 [8] として出版されているので、ここでは周辺事情などをこめて日本語で解説を書きたい。なお、類似の講演を Ihara 80 の研究集会で行ったが、そちらの報告集は英語で書く心づもりでいるので、そちらも参照されたい。

伊原康隆先生が 1963 年頃の修士論文の中の一部で、なんらかの離散群に関する2次のジーゲル保型形式と、$Sp(2,\mathbb{R})$ のコンパクト実形上の（具体的には、判別式が素数 p の定符号四元数環上の定符号4元数的エルミート群で決まるような）保型形式の間には、L 関数を保つような何らかの良い対応があるのではないか、という問題を提出し、また同時に、コンパクト実形の保型形式には、一定の条件下では、1変数の保型形式、ないしはその組からのリフトが存在することを証明した。当時は、まだラングランズの予想は発表されておらず、また、レベル付きの群に対するジーゲル保型形式の実例もあまり知られていなかったので、もっぱらコンパクト実形の中で理論が構築されていたが、この修士論文に書かれているリフトを、ここでは伊原リフトと呼んでいる。この伊原リフトは、現在で考えれば、斎藤・黒川リフト、および吉田リフトの両方のコンパクト版であり、非常に先駆的な仕事であった。しかし、このリフトが消えない条件は、計算してみて何かが消えなければ、という条件で有り、どの程度消えないのかは、全く分かっていない。この様子を予想の形で記述するのがこの論考のひとつの目的である。また、ジーゲル保型形式との対応については、あるとすればウェイトはどのような対応であるべきか、ということは、当時既に知られていた、holomorphic discrete series の指標公式などを用いて、既に伊原の修士論文であきらかにされていたのだが、それ以外の、どの離散群が、コンパクト実形のどの離散群（というかアデールの開部分群）と対応するかというようなことは、当時は分かっていなかった。その後、１９８０年代初め頃の筆者の仕事で、正確にどのような離散群をとれば対応するのかについての予想が一部述べられた。これは、保型表現の間の対応を一般的に明らかにするという視点では無く、昔の Eichler 流の、楕円保型形式と四元数体の Brandt 行列の間の対応のような、非常に綺麗な対応を一般化しようとするものであった。Eichler の対応というのは、典型的には、素数 p に対して、$SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(p)$ の保型形式（ただし new forms) と、判別式が p の定符号四元数環の、極大整数環に関する保型形式（実際上は、ある種の調和多項式の

ベクトル）との対応を述べたものである。これを一般化するためには、コンパクト実形、およびジーゲル保型形式に対して、どのような離散群をとれば、綺麗な対応があるかと言うことが真っ先に問題となる。私はこれに対して、parahoric 部分群（つまり局所的に p の部分で、岩堀部分群を含む群、ただし岩堀部分群の定義は、 mod p すると Borel 部分群になっているような群）をとれば良いのではないかとの想定の下に、精密な予想とその根拠を述べたのである。$Sp(2,\mathbb{Q})$ のレベル p の parahoric (真) 部分群は、７つある。これを Tits building で書くと、頂点が極大コンパクト群であり、面が岩堀部分群であり、中間的な辺に相当する部分群（の共役類）が３つある。この最後の３つを middle parahoric とここでは呼ぶことにする。コンパクト部分群の方では、極大コンパクト部分群が２つ、極小 parahoric 群がひとつである。これらは $Sp(2,\mathbb{Q})$ とコンパクト実形について、Extended Dynkin diagram で記述できるが、後者は前者を folding して得られる。これから何となく両者の対応が思い浮かぶのだが、実際にはかなり複雑である。しかし、ともかくも極大コンパクト群と極小パラホリック群については、１９８０年代に予想を提出した。しかし最後の middle parahoric については、長い間、よく理解できなかった。それが今回理解できるとともに、副産物として、伊原リフトの様子も（予想ではあるが）非常に正確に記述できたので、それについて述べるのが本稿の目的である。なお、対応の局所表現的な記述は、[12], [13], [14] を用いると、記載することができる。この部分は、当初の私の議論は、局所表現についての私の経験的な予想に基づいていたところがあったが、Ralf Schmidt 氏により、もっと確定的な記述ができた。これらについて、いろいろご教示いただいた点も多く、ここに彼に謝意を表する。

2. Compact 実形の保型形式

最初から、記号などを説明する。p を素数として、D を判別式が p の定符号四元数環とする。また D の極大整数環 O を一つ固定する。２次の４元数的エルミート群 G を

$$G=\{g\in M_2(D); gg^*=n(g)1_2,\quad n(g)\in\mathbb{Q}^\times\}$$

と定義する。ここで $g=(g_{ij})\in M_2(D)$ に対して $g^*=(\overline{g_{ji}})$ と定義している。ただし $\overline{g_{ij}}$ は g_{ij} の main involution による像である。G のアデール化を G_A として、v を $\mathbb{Q}$ の place とするとき、G_v を G_A の v 成分とする。とくに $\mathbb{H}$ を実数体上のハミルトンの４元数体とすると、

$$G_\infty=\{g\in M_2(\mathbb{H}); gg^*=n(g)1_2\}$$

であるが、$G_\infty^1=\{g\in G_\infty; n(g)=1\}$ とすれば、これはコンパクト群であり、また $G_\infty^1\otimes\mathbb{C}=Sp(2,\mathbb{C})$ であるから、これは階数２の実シンプレクティック群 $Sp(2,\mathbb{R})$ のコンパクト実形でもある。G_p の極大コンパクト部分群は、共役を除き二つあり、このうちの一つは

$$U_p=M_2(O_p)^\times\cap G_p$$

である。いわゆる４元数的エルミート極大格子の種は、D^2 では二つあるが、そのうちのひとつ、O^2 を含む種は principal genus という。D^2

ないし v 進完備化 D_v^2 に対して、G ないしは G_v がそれぞれ右からの乗法で作用するが、この作用に関して、U_p は O_p^2 を全体としてそれ自身に写す G_p の部分群である。他の極大コンパクト群は、principal genus とは異なる極大格子の種の固定群であるが、以下では使わないので、ここでは説明しない。(これについての予想は [4] ないし [6] に述べてある。) 他の素数 $q \neq p$ についても、$U_q = M_2(O_q)^\times \cap G_p$ とおく。実際は $q \neq p$ については、$G_q \cong GSp(2, \mathbb{Q}_q)$, $U_q \cong GSp(2, \mathbb{Q}_q)$ である。ここで

$$\mathcal{U}(p) = G_\infty U_p \prod_{q \neq p} U_q$$

と置くことにする。この群に対する G_A 上の保型形式の定義を述べる。G_∞^1 の既約表現 ρ を一つ固定する。ここで $\rho(\pm 1_2) = 1$ と仮定する。コンパクト古典群だから、もちろん既約表現はヤング図形 (ないしは dominant integral weight) で記述され、今の場合 (f_1, f_2) (f_1, $f_2 \in \mathbb{Z}$, $f_1 \geq f_2 \geq 0$) と 1 対 1 に対応するが、$\rho(\pm 1_2) = 1$ という条件は $f_1 \equiv f_2 \bmod 2$ という条件である。V を ρ の表現空間とする。(ρ, V) に対して、G_A の表現を、$G_A \to G_\infty \to G_\infty/\{center\} \cong G_\infty^1/\{\pm 1_2\} \to GL(V)$ で定義する。ρ と $\mathcal{U}(p)$ に対して

$$\mathfrak{M}_\rho(U(p)) = \mathfrak{M}_{f_1,f_2}(U(p)) = \{f : G_A \to V; f(uga) = \rho(u)f(g)\}$$

とおき、これを G_A の $\mathcal{U}(p)$ に関するウェイト ρ ないしは (f_1, f_2) の保型形式の空間と定義する。 ついでにヘッケ作用素を定義しておく。$z \in G_A$ に対して、$\mathcal{U}(p)z\mathcal{U}(p)$ の $\mathfrak{M}_\rho(U(p))$ への作用は、$\mathcal{U}(p)z\mathcal{U}(p) = \bigcup_{i=1}^d z_i\mathcal{U}(p)$ とするとき、次で定義される。

$$([\mathcal{U}(p)z\mathcal{U}(p)]f)(g) = \sum_{i=1}^d \rho(z_i)f(z_i^{-1}g)$$

また、自然数 n に対して、

$$T(n) = \{(z_v) \in G_A; v \neq \infty \text{ に対して } z_v \in M_2(O_v), n(z_v) \in n\mathbb{Z}_v\}$$

とおく。これらで生成される環の抽象的な構造は、n が p と異なる素数 q のべきの場合は $GSp(2, \mathbb{Q}_q)$ のヘッケ環と同じであり、環構造は志村によりわかっている。$v = p$ の場合は [11] にある。これらを用いるといわゆる Spinor L 関数が定義される。ヘッケ同時固有関数のオイラー因子は、 $q \neq p$ の場合だけ書くと、$\lambda(q^\delta)$ で $T(q^\delta)$ の固有値を表せば、

$$1-\lambda(q)q^{-s}+(\lambda(q)^2-\lambda(q^2)-q^{f_1+f_2+2})q^{-2s}-\lambda(q)q^{f_1+f_2+3-3s}+q^{2f_1+2f_2+6-4s}.$$

であり、これ (と p でのオイラー因子) の逆数を書けたものが L 関数である。

以上で、具体的な保型形式を記述するには表現空間 V を具体的に与える必要がある。これは [11] またはそれの元となった伊原先生の修士論文に書かれているが、具体的には $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$ と見なして、$\mathbb{H}^2$ 上の 8 変数調和多項式の一部として実現される。これは [10] にも記載してある。ただし、$\mathbb{H}^2$ へ G_∞ を右から作用させると、これは実際には一般

に multiplicity free ではない。$\mathbb{H}^1 = \{a \in \mathbb{H}; n(a) = 1\}$ とするとき、$\mathbb{H}^2$ には $\mathbb{H}^1$ が左からの積、G_∞^1 が右からの積で自然に作用するが、$\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{H}^1 \times G_\infty^1$ の作用で、初めて multiplicity free に作用する。(これは伊原リフトのあり方に影響している。）それはともかく、ρ の何らかの表現空間 V を具体的に与えて起きさえすれば、保型形式をもっと具体的に書くことができる。今 $G_A = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{U}(p) g_i G$ とダブルコセットに分解し、$\Gamma_i = G \cap g_i^{-1}\mathcal{U}(p) g_i$ とおくと、これは有限群である。

$$V^{\Gamma_i} = \{v \in V; \rho(\gamma)v = v \text{ for all } \gamma \in \Gamma_i\}$$

とおくと、実は $\mathfrak{M}_\rho(\mathcal{U}(p))$ は $\oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i}$ と同型である。従って、保型形式というのは、いろいろな有限群で不変な調和多項式のベクトル（principal genus の類数 h は一般に 1 ではないので、その類数分だけの個数の多項式のベクトル）と対応する。これは実際に計算可能な量であり、以下の予想を述べる際にも、多数の実例を計算しているが、本稿では述べない。詳しくは論文 [8] を参照されたい。

3. ジーゲル保型形式

一応定義を述べる。ρ を $GL_2(\mathbb{C})$ の既約多項式表現とする。これは $\det^k Sym(j)$、(k, j は非負整数)、ただし det は値を行列式とする一次元の表現で、$Sym(j)$ は j 次対称テンソル表現（２変数の j 次斉次多項式上の自然な表現で、表現の次数は $j+1$）でつきている。ρ はやはりヤング図形、ないしは dominant integral weight と対応しており、これはパラメータで書けば $(k+j, k)$ である。これに対応する表現を $\rho_{k,j}$ と書くことにする。

Γ をランク２の実シンプレクティック群 $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散部分群で、$\Gamma\backslash Sp(2,\mathbb{R})$ の体積が有限なものとする。２次ジーゲル上半空間 H_2 上の正則関数で、

$$f(\gamma Z) = \rho_{k,j}(CZ+D)f(Z) \qquad \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

が任意の $\gamma \in \Gamma$ について成立するものをウェイト $\rho_{k,j}$ の Γ のジーゲル保型形式という。普通 $j = 0$ のものをスカラー値、$j > 0$ のものをベクトル値ジーゲル保型形式と呼ぶ、さらに $\Gamma\backslash H_2$ の佐武コンパクト化の境界で消えるジーゲル保型形式をジーゲルカスプ形式という。このようなカスプ形式の全体を $S_{k,j}(\Gamma)$ と書くことにする。さて、ここでは Γ としては $Sp(2,\mathbb{Z})$ と通約的なものしか考えないので、$Sp(2,\mathbb{Q}_p)$ の真の標準パラホリック群 (と $Sp(2,\mathbb{Q})$ の共通部分）を全部あげておく。$Sp(2,\mathbb{Z})$ 以外の上記のような群は

$$B(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2,\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_0(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2,\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_0'(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2,\mathbb{Z})$$

$$\Gamma_0''(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & p^{-1}\mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2,\mathbb{Q})$$

$$K(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & p^{-1}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2,\mathbb{Q})$$

$$Sp(2,\mathbb{Z})^* = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & p^{-1}\mathbb{Z} & p^{-1}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & p^{-1}\mathbb{Z} & p^{-1}\mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2,\mathbb{Q})$$

で与えられる。ここで、

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、w は $K(p)$ を normalize し、また $Sp^*(2,\mathbb{Z}) = w^{-1}Sp(2,\mathbb{Z})w$, $\Gamma_0''(p) = w^{-1}\Gamma_0'(p)w$ であるから、空間 $S_{k,j}(\Gamma_0'(p))$ と $S_{k,j}(\Gamma_0''(p))$ は w で写りあい、たとえば次元は当然等しい。また、$K(p)$ は偏極 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ に対応する、いわゆるパラモジュラー群、$B(p)$ は岩堀部分群 (minimal parahoric) である。パラモジュラー群と岩堀部分群に関するコンパクト実形との保型形式の間の同型対応予想、ないしは次元の関係式などは、[4], [2], [6] に述べてあるのでここでは繰り返さない。本稿での問題は $\Gamma_0(p)$, $\Gamma_0'(p)$, $\Gamma_0''(p)$ である。ちなみに本稿では、$\Gamma_0(p)$ と書いたら常に上の $Sp(2,\mathbb{Z})$ の部分群を表すこととするが、$SL_2(\mathbb{Z})$ の通常の部分群と区別するために、

$$\Gamma_0^{(1)}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}); c \equiv 0 \bmod p \right\}$$

と、こちらは添え字 (1) をつけて書くことにする。

4. 次元の比較

我々の考察の出発点は、$Sp(2,\mathbb{Q})$ とコンパクト実形の保型形式の次元の比較である。群それぞれの個別の次元公式自身は新しくはない。実際にはスカラー値のときは私と橋本喜一朗氏により 1982 年までにすべて得られていた。ただし、$\Gamma_0'(p)$, $\Gamma_0''(p)$ については、$p=2,3$ については、昔計算をサボってしまってその後もやっていないので結果が無かった。（その他の $Sp(2,\mathbb{Q})$ の群やコンパクト実形については、やってあった。）しかし、スカラー値の場合は、$p=2$ の場合は、井草により、$Sp(2,\mathbb{F}_2)$ の $S_k(\Gamma(2))$ ($\Gamma(2)$ はレベル 2 の主合同部分群）への作用が分かっており、これから計算できていた。$p=3$ については、今では Freitag, Salvati-Manni の結果により、$\Gamma(3)$ の保型形式の環構造と、そこへの $Sp(2,\mathbb{F}_3)/\{\pm 1_4\}$ の作用が分かっていたので、それに基づいて、$\dim S_k(\Gamma_0'(3))=\dim S_k(\Gamma_0''(3))$ については北山秀隆氏に計算してもらった。一方ベクトル値の保型形式（つまり、コンパクト実形では $f_1>f_2$, $Sp(2,\mathbb{Q})$ については $j>0$）についても、いずれも各素点での local data の計算さえあれば、あとは実素点でのある量との積の和で計算できる。この実素点での量というのは、コンパクト実形の場合は、G_∞^1 の各共役類に対して、跡公式の中で、それぞれの共役類の寄与に対して、その共役類の指標を掛けることに相当し、またどの共役類についても、指標は（単なるコンパクト群の既約指標だから）古典的に分かっているので、計算はスカラー値の場合と同じであり、1980 年代から計算してあった。コンパクトでない場合、つまり、$Sp(2,\mathbb{Q})$ の場合は、この実素点に当たる部分の計算がベクトル値の場合にも若槻聡氏により計算された。素数での local data はベクトル値であろうと無かろうと同じものなので、これと組み合わせれば、次元は計算できる。しかし、素数における local data はどうしても必要である。これが、昔サボったツケがまわっていて、$\Gamma_0'(p)$, $\Gamma_0''(p)$ については、素点 p では、G_p と $GSp(2,\mathbb{Q}_p)$ の local data は異なり、G_p については local data は昔、[1] で計算してあったのだが、$GSp(2,\mathbb{Q}_p)$ の local data は、$\Gamma_0'(p)$ については、 $p=2, p=3$ では計算してないために、ベクトル値の場合の次元を $p=2,3$ で未だに計算できていない。(なお、$\Gamma_0(p)$ は橋本氏、$K(p)$ については私が、ちゃんとサボらないで、$p=2,3$ も計算してあったので、これらについては、ベクトル値であっても次元は分かっている。）当然にも局所計算は $p=2,3$ の場合は他の場合より面倒であって、だから昔、省略したのだが、いつかはやっておかなければならないとは思っている。（昔ある学生に「教育用」の問題として出してみたのだが、つまらない問題と思われて、やってもらえなかった。まあ労多くして功少ない計算なので無理も無いが。）以上の計算は、コンパクト実形ではウェイトは任意なのだが、$Sp(2,\mathbb{Q})$ については、跡公式の収束条件により、当初は $k\geq 5$ しかできていなかった。しかし、Lefschetz fixed point theorem と、コホモロジーの消滅（これは離散群による非常に微妙な結果で、他の群ではなりたたない）を組み合わせた計算により、$k\geq 5$ の場合の計算も援用して、スカラー値の場合は $k\geq 3$ まで公式を拡張することができる (cf. [5])。ただしベクトル値の

場合はこの拡張が単純では無く、私にはよくわからない。Dan Petersen がその場合もできると前から主張しているので、以下の結果は一般の場合でも $k \geq 3$ で正しいのだと思うが、彼からは、論文としては、まだまとめておらず、書いたら知らせると言われている。これはかなり前の話だが、まだ何も聞いていないので、たぶん書いていないのであろうと思う。

それはともかく、以上で得られる中間パラホリック群の場合の次元比較定理は次の通りである。

Theorem 1. $k \geq 3$, $j \geq 0$ を整数とする。ただし、前述の理由で、$j > 0$ かつ $p = 2, 3$ または $j > 0$ で $k = 3, 4$ の場合は除く。このとき、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}&\dim S_{k,j}(\Gamma_0'(p)) + \dim S_{k,j}(\Gamma_0''(p)) - \dim S_{k,j}(\Gamma_0(p)) - 2\dim S_{k,j}(K(p))\\&= \dim \mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p)) - \delta_{k3}\delta_{j0}\\&-(\dim S_{j+2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(p)) + \delta_{j0}) \times (\dim S_{2k+j-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(p)) + \dim S_{2k+j-2}(SL_2(\mathbb{Z}))).\end{aligned}$$

ただしここで、1変数の保型形式に関しては、$S_*^{new}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ は newforms の空間という意味である。また δ_{**} は Kronecker のデルタである。前に注意したように、もちろん $\dim S_{k,j}(\Gamma_0'(p)) = \dim S_{k,j}(\Gamma_0''(p))$ である。この定理の要点は、関係式が存在することをみつけることにある。つまり、実際の次元公式は数十の項の和からなっているわけで、それを漫然と書いてみても、関係式は見つからない。実際、筆者は次元公式は１９８０年代から知っていたのだが、この関係式を見つけたのは、２０１２年ごろの事である。最初の頃から考えて３０年近く経過している訳だから、これが容易だったとは言えないだろう。これを見つけるに際して、そもそも「大域的な説明ができるわけ無い」とかいう「専門家」の意見に代表されるような心理的な障壁が少なからずあったわけで、何かあるはずだと思える心理になったのが見つかった理由とも言える。

それはともかく、この関係式が何を意味しているかについて、次の節から述べてゆく。

5. 伊原リフトの像に関する予想

さて、Theorem 1 の主な項は、左辺は

$$2\dim S_{k,j}(\Gamma_0'(p)) - \dim S_{k,j}(\Gamma_0(p)) - 2\dim S_{k,j}(K(p))$$

であり、右辺は $\dim \mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ である。右辺はわかりやすいが、左辺は、少しわかりにくい。これは一つの保型表現で、$\Gamma_0'(p)$, $\Gamma_0(p)$, $K(p)$ の固定ベクトルがいくつあるか、ということと関係がある。岩堀部分群が固定するベクトルのある p-adic な局所既約認容表現については、Roberts and Schmidt [12] により分類されており、表現は数十個あるが、その表を見ればいろいろなことがわかる。　ある p-adic な局所既約表現について、$\Gamma_0'(p)$, $\Gamma_0(p)$, $K(p)$ の fixed vectors の次元を a, b, c と書き、

$$c_0 = 2a - b - 2c$$

とおくと、これが一つの表現の左辺への寄与である。彼らの表に依れば、c_0 のとれる値は $-1, 0, 1, 2$ である。このそれぞれについてどう解釈すべきかを述べることができる。たとえば $c_0 = -1$ というのはどういうことなのか。この場合、$\Gamma_0(p)$ または $K(p)$ のどちらかに保型形式があり、その次元が $\Gamma_0'(p)$ のところより大きいからマイナスになるのだが、その一方で、右辺でマイナスが生じるのは、1 変数から来ているところだけで、これと左辺のマイナスはキャンセルしていると考えられる。つまり、左辺のマイナスは 1 変数と関係しているので、左辺へのリフトと関係していると考えられる。$\Gamma_0(p)$ へのリフトの様子はかなりよくわかっている。リフトにはいわゆる斎藤・黒川リフト（レベルがあってもなくても）と吉田リフトがあるが、この像は、斎藤・黒川リフトについては Maass（レベル p のときは [7] の結果も参照）, Boecherer-Schulze-Pillot などによりよく分かっており、またこれは表現論的にも、他の群での固定ベクトルの次元も [14], [13] などで分かっているので、その様子は正確にわかる。左辺のどこにもリフトが無い場合、右辺のマイナスがキャンセルできるのは $\mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ しかない。つまりその場合は $\mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ に 1 変数、ないしは 1 変数の組からの伊原リフトがあるべきだと言うことになる。それで伊原リフトに関するかなり正確な予想が述べられる。吉田リフトの存在の様子は Atkin-Lehner involution の固有値の様子によっているので、これを定義しておく。楕円カスプ形式 $f \in S_k(\Gamma_0^{(1)}(p))$ に対して、$f|_k W_p = (\sqrt{p}\tau)^{-k} f(p\tau)$ と書く。この作用 W_p は 2 乗すると 1 なので、固有値は ± 1. それで、$S_*^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(p))$, $S_*^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ で、new forms の中の、W_p の固有値 $+1$ または -1 に対する固有空間を表すとする。

Conjecture 2. *(1)* 任意の奇数 $k \geq 3$ について、次の単射が存在する。

$$S_{2k-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(p)) \oplus S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \to \mathfrak{M}_{k-3,k-3}(\mathcal{U}(p)).$$

(2) 任意の整数 $k \geq 3$ と偶数 $j \geq 0$ について, 次の単射が存在する。

$$S_{j+2}^{new,\pm}(\Gamma_0^{(1)}(p)) \times S_{2k+j-2}^{new,\mp}(\Gamma_0^{(1)}(p)) \to \mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p)).$$

(3) 任意の整数 $k \geq 3$ と偶数 $j \geq 0$　に対して、次の単射が存在する。

$$S_{j+2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(p)) \times S_{2k+j-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \to \mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))).$$

ここでのリフトはみな、1 変数でウェイトが $j+2$ のものとウェイトが $2k+j-2$ のものの組のリフトと見なせる。たとえば (1) の場合は、ウェイト 2 のアイゼンシュタイン級数とウェイト $2k-2$ のカスプ形式の組からのリフトと見なせば良い。ウェイトが $j+2$ の保型形式を f, ウェイトが $2k+j-2$ の保型形式を g とすると、リフトした先の保型形式 F のスピノール型 L 関数は（少なくとも p のオイラー因子を除いては）

$$L(s,F) = L(s-k+2,f)L(s,g)$$

で与えられる。ここで右辺はヘッケの古典的な意味での L 関数である。特に f がウェイト 2 のアイゼンシュタイン級数ならば、$L(s-k+2) =$

$\zeta(s-k+2)\zeta(s-k+1)$ となって、普通の斎藤・黒川リフトと同じ形である。

以上の予想の理由について、全部の場合を述べるのはやめて、一番典型的な $Sp(2,\mathbb{Z})$ への斎藤・黒川リフトについて述べる。$Sp(2,\mathbb{Z})$ への斎藤・黒川リフトへの像に対応する p での局所表現は Roberts and Schmidt [12] でわかっていて、fixed vector の次元は以下の通りである。

$Sp(2,\mathbb{Z})$	$\Gamma_0(p)$	$\Gamma_0'(p)$	$K(p)$
1	3	2	1

よって、$c_0 = 2\times 2 - 3 - 1\times 2 = -1$ である。よって、右辺と比較して、この場合、この 1 変数の保型形式から $\mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ にはリフトはないはずである。$Sp(2,\mathbb{Z})$ にリフトがあるのは k が偶数で $S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ からである。逆に k が odd の場合は、ジーゲル保型形式にはリフトはないはずだから、$\mathfrak{M}_{k-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ の側にリフトがあるはずである。これは伊原リフトである。以上は多数の実例計算にも一致している。他の場合もいちいち局所表現を考えて、以上のようなつじつま合わせを行えば、前に述べた予想にたどりつく。

伊原リフトの実例を計算するのは、かなり面白い練習問題であるが、ここでは述べない。論文を参照されたい。(ちなみに、コンパクト群上の保型形式は、最近では Gross が、おそらくは Ihara の結果を知らずに定式化して、algebraic modular forms と呼ばれるようになっている。そのせいで、アメリカやドイツなどで具体的な計算を進めている人もいろいろいるらしいが、詳しくは知らない。伊原の結果も私の結果も認識していないように思われるのは、大変残念なことである。)

6. リフト以外の対応: $c_0 = 0$

前節で述べたことのうちの半分は、ジーゲル保型形式の方に焦点を当てて述べれば、$c_0 = -1$ となるような保型表現は、リフトで説明されると言うことである。それでは残りの $c_0 = 0, 1, 2$ の場合はどうなのであろうか。$c_0 = 0$ の場合は、コンパクト実形にリフトがあって $Sp(2,\mathbb{Q})$ にない場合だけではなく、実はジーゲル保型形式にもコンパクト実形にも両方ある種のリフトがあって、両方とも次元公式への寄与は消えている、という場合もあるであろう。しかし、リフト以外はどうなっているのだろうか。これは実例で説明する方がわかりやすい。その昔計算した実例に依れば、$p=2$, $k=12$ では 3 での固有値が

$$\lambda(3) = -88488$$

となるようなジーゲル保型形式が存在する。この固有値に対応する固有空間の具体的な次元は

$\Gamma_0(2)$	$\Gamma_0'(2)$	$K(2)$
2	1	0

である。これは $c_0 = 1\times 2 - 2 = 0$ である。また $T(n)$ $(n \neq 2)$ の固有値はこれらの保型形式で全部同じである。一方で、$\mathfrak{M}_{9,9}(\mathcal{U}(2)) = 0$ なので対応すべきコンパクト実形の保型形式というのは、はじめから全

く存在しない。すなわち、middle parahoric 群のジーゲル保型形式の中には、コンパクト実形の保型形式とは対応しないものがある。これは 1 変数でも、たとえば new form でないと対応しないのだから、まあ当然ではあるが、その様相がもっと複雑になっているのである。これに対応する局所表現がなんであるかは、Roberts and Schmidt の表をみればわかるがここでは述べない。

7. リフト以外の対応：$c_0 = 2$

伊原は、論文 [11] で $p = 3$ のリフトをいろいろ構成しているが、それ以外に、リフトでないものも構成している。たとえば $f_1 = f_2 = 8$ のとき、$\mathfrak{M}_{8,8}(\mathcal{U}(3))$ の次元は 6 であるが、伊原はこれの具体的な（非常に複雑な）基底を全部与え、このうち 4 次元分は斎藤・黒川型のリフトである。残りの 2 次元はリフトではない事を示した。当時、計算機が無かったことを思えば、計算は非常に面倒であったと思われる。さて、大変面白いことに、この残りのリフトでない 2 次元分の Euler 2 factor は完全に一致する。それで、論文 [11] では、これは他の Euler 因子も全部一致するのかどうかを問題としている。いかにも正しそうである。実は私は今でもこれが正しいという完全な証明は持っていない。しかし、正しいと思われる理由を述べることはできるので、以下これを解説する。この保型形式に対応するジーゲル保型形式があるとすると、これはレベル 3 のウェイト 11 の保型形式であるべきである。前に述べたようにレベル 3 の主合同部分群に関する保型形式環は Freitag Salvati-Manni により知られている。それで、原理的にはレベル 3 の保型形式を計算することができる。（実際にはかなり大変であるが。）この保型形式は、計算機を使って北山秀隆氏が具体的に表示してくれた。その結果によると、まず次元は $\dim S_{11}(\Gamma_0(3)) = 0$, $\dim S_{11}(K(3)) = 1$, $\dim S_{11}(\Gamma_0'(3)) = \dim S_{11}(\Gamma_0''(3)) = 2$ である。一般に $\Gamma_0'(p) \subset K(p)$ であるから、$S_{11}(\Gamma_0'(3))$ の 2 つの固有関数のうちの一方は $K(3)$ の保型形式から来ており、これは実際にはリフトである。のこりの一つの Euler 2 factor は

$$(1 - 12(-9 + \sqrt{1489})2^{-s} + 2^{19-2s})(1 - 12(-9 - \sqrt{1489})2^{-s} + 2^{19-2s})$$

であることが、北山君の与えた基底を用いて、具体的なヘッケ作用素の作用を計算することによりわかる。これは伊原の例の Euler 2 factor と完全に一致する。まとめて言えば、$S_{11}(\Gamma_0'(3))$ と $S_{11}(\Gamma_0''(3))$ に実質的には同じ保型形式（たがいに w で写りあう保型形式）があって、これが $\mathfrak{M}_{8,8}(\mathcal{U}(3))$ の 2 つの保型形式と対応すると言う形になっている。だから、次元の関係から言って、コンパクト実形での伊原の与えた実例は L 関数が（少なくとも good prime では）完全に一致しないと困るのである。

もう一度言うと、ジーゲル保型形式の側で $c_0 = 2$ となる保型形式は、$\mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ の L 関数が等しい、異なる 2 つの保型形式と対応すべきだと言うことになる。$\mathfrak{M}_{k+j-3,k-3}(\mathcal{U}(p))$ の方で、これらの 2 つが保型表現として同じものなのかどうかという問の答はよくわからない。ジーゲル保型形式の方では、$c_0 = 2$ での実例では、たとえば $\Gamma_0(p)$ に

2つある保型形式は、異なるものになっているし、これら2つは、bad prime p での固有値、というかヘッケ作用素の様子は異なってはいるが、保型表現としては当然同じものである。ともに「$\Gamma_0'(p)$ から来ている」はずだからである。だから、対応するコンパクト実形の方の保型形式も保型表現としてはただ一つと思うのが自然だとは思う。だから、前にあげた具体例について、これらが同じ保型表現から来ることを証明せよという問題が、生じそうに思われる。しかし、普通、同じ保型表現に属する保型形式はbad primeでのヘッケ作用素などを操作して、実は同じ表現だ、ということが示せることが多いように思うが、たとえば伊原の例ではどうなのか。たとえば上記の実例については、どうなのか？このような問題を以前に、ある私の学生に出したところ、どうも簡単には分からないという答えだった。たとえば、G_p には二つ極大コンパクト群があるが、今の保型形式は、この一方の群の保型形式である。一方の群から他方の群に写るには、たとえば、群の共通部分に対する跡をとればよく、他方の群のこの写像による像などを眺めると、両者の関係がわかるのではないか、と思ったのだが、実験結果はこういう写像は消えるので何も出ない、という事だったと思う。とすると、実は保型表現として、違う表現なのか？これは重複度1の反例なのであろうか？いずれにせよ、$c_0 = 2$ の場合というのは、特に珍しい例では無く、例は他にもわりと簡単につくれるいうことは付言しておく。以上、当然ノンリフト通しの対応である。

8. リフト以外の対応：$c_0 = 1$

この場合は左辺に1次元だけ残るのだから、右辺でもなんらかの一次元なものが対応すべきだと思えば、一見この場合が一番望ましい1対1対応を与えそうに思われる。ところがこのような（大域的な）実例は（リフト以外は）今のところ、見つかっていない。つまり、ジーゲル保型形式の方の例で、そもそも状況がこのようになっているノンリフトの例を私は一つも知らない。従って、あまり確定的なことがいえない。Roberts and Schmidt の表によれば、このような $GSp(2,\mathbb{Q}_p)$ の局所表現は2つだけである。ひとつはリフト、もう一つはノンリフトである。ところが Schmidt の意見だと、局所表現でリフトから来ない方は、コンパクト実形とは対応しないはずだというのである。彼の言う理由を私はよく勉強していないので、よくわからないが、そうだとすると、こういう大域的なジーゲル保型形式は、存在すると困るのである。なぜなら左辺がゼロで無ければ、右辺にも残るはずだが、それはないと言っているのだから。しかし大域的に現れないという理由がどうもあまりよく分からないと Schmidt 氏はいう。次元公式の対応は変えようがないので、そのまま受け止めるしかないと思うが、将来の解読が必要な部分であろう。

以上で、各 c_0 の場合分けや、リフトについて、Roberts and Schmidt の表の、どの局所表現が現れるかというのは分かるが、ここでは述べない。また、以下の文献は網羅的にあげたわけではない。以上、この論説のより詳しい解説や、より詳しい文献は [8] を参照されたい。つい

でながら、ジーゲル保型形式の入門的な事項については、[9] も参照していただければ幸いである。

References

[1] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion harmitian forms. J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect.IA Math. **27**(1980). 549–601; (II) **28** (1982), 695–699; (III) **30** (1983), 393–401.

[2] K. Hashimoto and T. Ibukiyama. On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (II). Advanced Studies in Pure Math. **7** (1985), 30–102.

[3] T. Ibukiyama. On symplectic Euler factors of genus two. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **30** (1984), 587–614.

[4] T. Ibukiyama. On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (I). Advanced Studies in Pure Math. **7** (1985), 7–29.

[5] T. Ibukiyama, Dimension formulas of Siegel modular forms of weight 3 and supersingular abelian surfaces, in Proceedings of the 4-th Spring Conference, *Abelian Varieties and Siegel Modular Forms* (2007), 39–60.

[6] T. Ibukiyama, Paramodular forms and compact twist, Automorphic Forms on GSp(4), Proceedings of the 9-th Autumn Workshop on Number Theory, Ed. M. Furusawa (2007), 37–48.

[7] T. Ibukiyama, Saito Kurokawa lifting of level N and practical construction of Jacobi forms, Kyoto J. Math. **52**, No. 1 (2012), 141–178.

[8] T. Ibukiyama, Conjectures on correspondence of symplectic modular forms of middle parahoric type and Ihara lifts, Res. Math. Sci. **5** (2018), no. 2, Paper No. 18, 36 pp, Springer Verlag.

[9] 伊吹山知義、保型形式特論、共立出版、２０１８年５月、x+467 pp.

[10] T. Ibukiyama and Y. Ihara. On automorphic forms on the unitary symplectic group $Sp(n)$ and $SL_2(\mathbb{R})$, Math. Ann. **278** (1987), 307–327.

[11] Y. Ihara, On certain arithmetical Dirichlet series, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 214–225.

[12] B. Roberts and R. Schmidt, Local new forms for $GSp(4)$, Lecture Notes in Mathematics, **1918**, Springer Verlag, Berlin (2007).

[13] R. Schmidt, Iwahori-spherical representations of $GSp(4)$ and Siegel modular forms of degree 2 with square-free level. J. Math. Soc. Japan **57** (2005), 259–293

[14] R. Schmidt, On classical Saito-Kurokawa liftings, J. reine angew. Math. **604**(2007), 211–236.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan

E-mail address: ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp